

УДК 515.16+512.734

## Алгебры Янга–Бакстера, алгебра конволюций и многообразия Грассмана

В. Г. Горбунов, К. Корфф, К. Стропфель

Статья посвящена новому, активно развивающемуся направлению современной математики – изучению связи квантовых интегрируемых моделей и исчисления Шуберта для колчаных многообразий. В статье предлагается геометрическая конструкция решений уравнения Янга–Бакстера и алгебр, связанных с ними, которые называются алгебрами Янга–Бакстера. Эти алгебры играют центральную роль в квантовых интегрируемых системах и точно решаемых (интегрируемых) решеточных моделях статистической физики. Мы покажем на примере классической геометрии многообразий Грассмана, как появляется указанная выше связь. Конкретно, мы отождествляем алгебру конволюций, возникающую в эквивариантном исчислении Шуберта, с алгеброй Янга–Бакстера вырождения асимметричной шестивершинной модели, так называемой пятивершинной модели. Мы покажем также, как, используя наши методы, можно построить действие факторов универсальной обертывающей алгебры для алгебры токов  $\mathfrak{sl}_2[t]$  (так называемые алгебры типа Шура) на тензорных произведениях ее представлений вычисления  $\mathbb{C}^2[t]$ . Наконец, мы связываем нашу конструкцию с когомологической алгеброй Холла для колчана  $A_1$ .

Библиография: 125 названий.

**Ключевые слова:** квантовые интегрируемые системы, колчаные многообразия, квантовые когомологии.

DOI: <https://doi.org/10.4213/gm9959>

### СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение.....	4
2. Язык диаграмм в теории интегрируемых систем.....	8
2.1. Матрицы Лакса и матрицы монодромии.....	8
2.2. Вычисление матричных коэффициентов.....	12
2.3. Квантовое уравнение Янга–Бакстера.....	12
2.4. Шести- и пятивершинные модели.....	14

Работа первого автора выполнена при поддержке РФФ (грант № 20-61-46005) и программы повышения конкурентоспособности ведущих университетов РФ (проект “5-100”).

3. Алгебры Янга–Бакстера и векторы Бете.....	15
3.1. Алгебры Янга–Бакстера.....	15
3.2. Действие симметрической группы и алгебры $\mathbf{H}$ .....	18
3.3. Векторы Бете.....	19
4. $R$ -матрица, связанная с геометрией многообразия Грассмана.....	23
4.1. Базисы.....	24
4.2. Твистованные классы Шуберта.....	24
4.3. Эквивариантные твистованные классы Шуберта.....	25
4.4. Переход через стенку камеры Вейля.....	28
4.5. Геометрический базис Бете.....	29
5. Геометрические алгебры Янга–Бакстера и конволюции в когомологиях.....	30
5.1. Комбинаторика неподвижных точек действия тора в частичных многообразиях флагов.....	30
5.2. Геометрические алгебры Янга–Бакстера.....	31
5.3. Важные соотношения.....	33
5.4. Сравнение геометрического и алгебраического действий.....	36
5.5. Явные формулы.....	37
6. Эквивариантные квантовые когомологии.....	39
6.1. Оператор $D$ .....	39
6.2. Квантовая деформация.....	40
6.3. Эквивариантные квантовые когомологии.....	41
7. Связь с алгеброй токов $\mathfrak{gl}_2[t]$ .....	42
7.1. $\mathbb{V}_N$ как представление $\mathbf{H}$ .....	42
7.2. $\mathbb{V}_N$ как представление $\mathfrak{gl}_2[t]$ .....	44
7.3. Локализация алгебры Шура и алгебры Янга–Бакстера.....	46
8. Связь с когомологическими алгебрами Холла.....	47
8.1. Пример: $\text{CoHa}(A_1)$ .....	47
8.2. Действие на $H_T^*$ .....	48
8.3. Когомологическая алгебра Холла и геометрическое действие алгебр Янга–Бакстера.....	49
9. Заключительные замечания и направления дальнейших исследований.....	50
9.1. Квантовые аффинные алгебры.....	50
9.2. Операторы Демазура, колчаные алгебры Гекке, колчаные алгебры Шура и когомологические алгебры Холла.....	51
9.3. Собственные функции $q$ -разностных операторов.....	51
9.4. Теоретико-множественные решения уравнений Янга–Бакстера.....	52
Список литературы.....	52